2019 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初賽個人賽試題

_____縣市_____國民中學____年級　編號：_____　姓名：_____

作答時間: 二 小 時　　性別: □男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

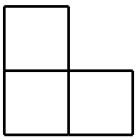
1. 在小於 108 的正整數中，若有 n 個正整數之數碼和為 8，則 n = _____。

答：_____

2. 設方程 $(x^2-3)(x^2-5)=k$ 的四個根成等差數列，則 k 之值為_____。

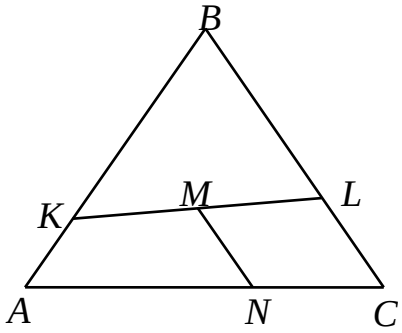
答：_____

3. 從 100×107 的方格表中取出一片如下圖所示的 L 形三方塊，則總共有_____種不同的取法。



答：_____ 種

4. 如下圖所示，在等腰三角形 ABC 的兩腰 AB、BC 上分別有 K、L 兩點使得 $AK+LC=KL=10\sqrt{6}$ cm；點 M 為 KL 的中點且 AC 邊上有一點 N 使得 MN 平行 BC。則 MN 的長度為_____ cm。



答：_____ cm

5. 小華跟小明依照以下規則輪流從一堆硬幣中取走 1 枚或 1 枚以上的硬幣：
   - 如果恰只剩 1 枚硬幣，輪到的人必須取走這枚硬幣；
   - 如果剩下的硬幣多於 1 枚，輪到的人至多可以取走一半的硬幣。

已知共有 42 枚硬幣且取走最後一枚硬幣的人獲勝。若由小華開始取硬幣且他始終都保持最佳策略。則小華為了保證獲勝，他第一次取硬幣時必須取_____枚。

答：_____ 枚

6. 若 a、b 為方程 $x^2-2kx+k^2-2k-1=0$ 的兩個根。則使得 $\frac{(a-b)^2-2}{2(a+b)^2+4}$ 為正整數之 k 值為_____。

答：_____

7. 將正奇數按下圖所示排列，令 $a_{m,n}$ 為由上從下數第 m 列，由左往右數第 n 個元素，例如 $a_{3,2}=9$。若 $a_{m,n}=2019$，則(m, n) =_____。

1

3 5

7 9 11

13 15 17 19

. . . . . .

答：_____

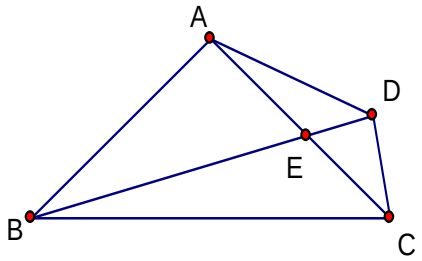
8. 已知三個正整數 x、y、z 兩兩互質，且滿足其中任意兩個數的和可被第三個數整除。如果 $x<y<z$，則代數式 $\frac{y+z}{x}$ 的值為_____。

答：_____

9. 設 a_1、a_2、…、a_{30} 均為正整數，且 $a_1+a_2+\ldots+a_{30}=43$。若 $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{30}^2$ 的最大值為 A，最小值為 B，則 $A+B=$ _____。

答：_____

10. 在四邊形 $ABCD$ 中，$AB=AC=\sqrt{5}$ cm,$CD=1$ cm, $\angle BAC=\angle BDC=90^\circ$ ，對角線 AC 與 BD 相交於點 E 點，如圖所示，則 DE 的長度為_____cm。



答：_____cm

11. 有甲、乙兩個容器，甲容器原裝有 1 公升的水，乙容器是空的。第一次將甲容器中水的 $\frac{1}{2}$ 倒入乙容器，第二次將乙容器中水的 $\frac{1}{3}$ 倒入甲容器，第三次再將甲容器中水的 $\frac{1}{4}$ 倒入乙容器，…依此規則繼續下去。已知倒了 100 次之後，甲容器中有 x 公升的水，則 x 之值為_____。

答：_____

12. 甲、乙兩地相距 120 公里，規定機車最多騎坐兩人。小明、阿廷與小君三個人想用一部機車，從甲地同時出發到乙地，而且這三個人想要**同時**到達乙地，假設這三個人每個人跑步的時速都是 10 公里，騎機車的時速是 50 公里。則小明、阿廷與小君三個人要同時完成這趟路程至少需要花費的時間為_____小時。

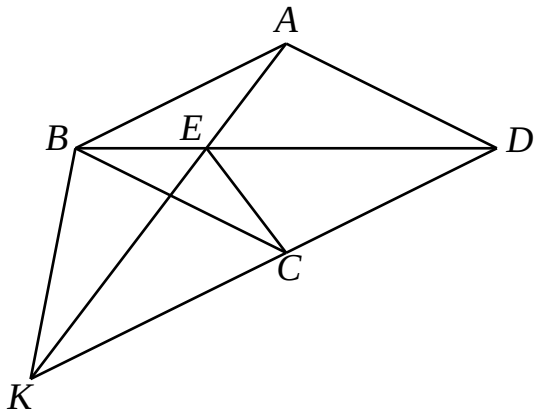
答：_____小時

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. (a) 請從 2 至 2019 中找出 43 個數，使得將此 43 個數刪去後，剩下的 1975 個數中任何一個數都不等於另外兩個相異數的乘積。(5 分)
   (b) 請證明從 2 至 2019 中任意刪除 42 個數，剩下的 1976 個數中必有某個數等於另外兩個相異數的乘積。(15 分)

2. 已知 $ABCD$ 為菱形，點 K 為 DC 延長線上的點並滿足 $AD = BK$。令 AK 與 BD 相交於點 E，如圖所示。請證明 $EB = EC$。



3. 座號 1 到 39 號的同學依序由左至右坐在一排椅子上玩一個遊戲，每張椅子上至多有一位同學坐在上面。開始時同學們佔據連續的 39 張椅子，而每位同學可以向右移動但不可以向左移動。每一次移動，一位同學可以移到下一張空椅子上或跳過一個緊鄰的同學到這位同學緊鄰的空椅子上。經過一陣子，同學們再度佔據連續的 39 個位子，但從左到右編號變成 39 到 1。請問這個遊戲最少總共需要多少張椅子？

答：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿張